

法政大学学術機関リポジトリ  
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

# 離散可積分系による交通流モデルの時間差分化および超離散化とその厳密解

著者	鈴木 大庸
出版者	法政大学大学院理工学研究科
雑誌名	法政大学大学院紀要．理工学・工学研究科編
巻	59
ページ	1-6
発行年	2018-03-31
URL	<a href="http://doi.org/10.15002/00021622">http://doi.org/10.15002/00021622</a>

# 離散可積分系による交通流モデルの 時間差分化および超離散化とその厳密解

THE TIME-DISCRETE AND ULTRADISCRETE TRAFFIC FLOW MODELS  
VIA DISCRETE INTEGRABLE SYSTEM AND THEIR EXACT SOLUTIONS

鈴木 大庸

Kouyo SUZUKI

指導教員 磯島 伸

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

The exponential Newell-Whitham (eNW) model, defined by a differential equation with time-delay, is one of the most important models for traffic flow. In this thesis, we propose the ultradiscrete eNW model, which is a cellular-automaton model, by applying the ultradiscrete method to the eNW model. We first point out that there is a close relationship between the eNW model and the Lotka-Volterra (LV) equation, which is a soliton equation. The time-discrete analogue of the LV equation which keeps its integrability is well-known in the field of integrable systems. Considering these facts, we then give a time-discrete analogue of the eNW model. Furthermore, we present its exact solution using the bilinear method as well as Kanai and Tutiya did for the original eNW model. Also, since the ultradiscrete method can result in reducing soliton equations to cellular automata which inherit the solitonic nature such as an infinite number of conservation laws and soliton solutions, we apply it to the discrete-time eNW model and its exact solution to obtain the ultradiscrete eNW model and its exact solution. Finally, we evaluate the validity of this model as a traffic flow model by studying the behavior of the exact solution.

**Key Words** : traffic flow, delay differential equation, cellular automaton, integrable systems, ultradiscretization, soliton equations

## 1. はじめに

交通流は、待ち行列や流体力学など様々な視点からモデル化されている。その中で、粒子(車)が限定された方向に衝突や追いつきをせず動き、かつ非対称に相互作用する 1 次元系にモデル化されるものを追従モデルと呼ぶ(図 1 参照)。1990 年に Whitham によって提出された, exponential Newell-Whitham (eNW) モデル [1]

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(h_n(t)) \quad (1)$$

ただし,

$$V(h) = V_0[1 - \exp(-(\alpha/V_0)(h - L))] \quad (0 < \alpha) \quad (2)$$

はその 1 つである。このモデルに対し、金井、土谷によって双線形形式を用いた厳密解 [2] が示された。しかし、現在に至るまで、時間離散化や超離散化の研究がなされていなかった。本稿では、先行研究 [3] の手法を用いて、eNW モデルを可積分系と関連付け、その時間離散化 [4] と超離散化を提案する。さらに、特殊解の導出およびそのグラフの描画を行い、交通流モデルとしての妥当性を検討する。

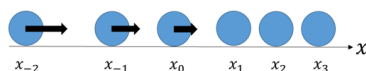


図 1 車が追いつかず、衝突しない一車線交通

## 2. eNW モデルの時間差分化

### (1) eNW モデル

時刻  $t$  での,  $n$  番目の車の位置を  $x_n(t)$ , 先行する  $n + 1$  番目の車との車間距離を

$$h_n(t) := x_{n+1} - x_n \quad (3)$$

とする。そして、車間距離  $h$  に対して最適な速度を返す OV 関数  $V(h)$  を導入し、交通流モデルとして遅延時間を  $\tau$  とする遅延微分方程式 [1], [6] (1) 式を考える。特に、(2) 式の場合(図 2 参照)を指数関数型 NW(eNW) モデルと呼ぶことにする。ここで  $V_0$  は最大速度,  $L$  は最小車間距離を意味し,  $\alpha$  は  $h = L$  における微分係数である。なお、OV 関数を

$$V(h) = \tanh(h - c) + \tanh c \quad (c > 0 \text{ は定数}) \quad (4)$$

とする場合もよく知られている。

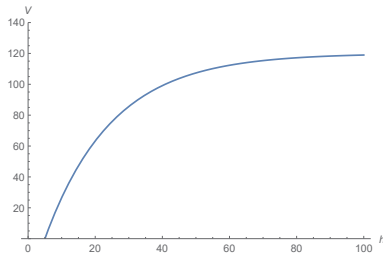


図 2  $V_0 = 120, L = 5, \alpha = 6$  の eNW モデルの OV 関数

## (2) eNW モデルと離散可積分系

eNW モデルを車間距離  $h$  のみを用いた形

$$\dot{h}_n(t + \tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \quad (5)$$

に書き換える。ここで、

$$s_n(t) = \frac{\alpha}{V_0}(h_n(t) - L) \quad (6)$$

と変換すると

$$\frac{1}{\alpha} \dot{s}_n(t + \tau) = -e^{-s_{n+1}} + e^{-s_n} \quad (7)$$

となる。eNW モデルについては、交通流と類似した系である格子系で、なおかつ可積分である Kac-van Moerbeke (KvM) 系

$$\dot{R}_j = -e^{-R_{j-1}} + e^{-R_{j+1}}, \quad R_j = R_j(T) \quad (8)$$

と対比することにより厳密解を求めることができる [1], [6]. 変数変換

$$e^{-s_n} = S_n \quad (9)$$

によって (7) は

$$\frac{1}{\alpha} \dot{S}(t) = S_n(t) \{S_{n+1}(t - \tau) - S_n(t - \tau)\} \quad (10)$$

となる。KvM 系に eNW モデルと同様の変数変換

$$e^{-R_j} = u_j \quad (11)$$

を施すと、

$$\dot{u}_j + u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) = 0, \quad u_j = u_j(T) \quad (12)$$

と Lotka-Volterra (LV) 方程式に変形できる。(10) と (12) はそれぞれ進行波

$$\begin{aligned} S(\phi) &= S_n(t), \quad \phi = \frac{\alpha}{\tau}t + 2\alpha n \\ u(\Phi) &= u_j(T), \quad \Phi = \frac{1}{\tau}T + \alpha j \end{aligned} \quad (13)$$

を仮定すれば同じ方程式

$$\frac{1}{\tau} \dot{S}(\phi) = S(\phi) \{S(\phi + \alpha) - S(\phi - \alpha)\} \quad (14)$$

$$\frac{1}{\tau} \dot{u}(\Phi) = u(\Phi) \{u(\Phi + \alpha) - u(\Phi - \alpha)\}$$

に帰着されるため、解の一部を共有することがわかり、独立変数の関係

$$t = \frac{T}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \quad (15)$$

がわかる。

## (3) 全離散 eNW モデル

全離散 LV 方程式 [5] は

$$\frac{v_j^{T+1}}{v_j^T} = \frac{1 + \delta v_{j+1}^T}{1 + \delta v_{j-1}^T} \quad (16)$$

で与えられる。これを利用して全離散 eNW モデルを導く。

まず、 $S_n(t)$  の時間離散化を  $K_n^i = \frac{1}{\alpha} S_n(\gamma i)$  ( $t = \gamma i$ ) とする。(13) 式から

$$S_n(t - \tau) = S_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad (17)$$

が成り立ち、その離散類似として

$$K_n^{i-m} = K_{n-\frac{1}{2}}^i, \quad m = \frac{\tau}{\gamma} \quad (m \text{ は正の整数}) \quad (18)$$

を仮定する。また、半離散での進行波の仮定を比較することで

$$\begin{aligned} K_n^i &= v_j^T \\ \tilde{t} &= \frac{\tilde{T}}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

という関係がわかり、時間差分間隔は  $\gamma = \delta/\alpha$  とするのが妥当である。

$$\begin{aligned} v_j^{T+1} &= K_n^{i+\frac{1}{\alpha}}, \quad v_j^T = K_n^i \\ v_{j+1}^{\tilde{T}} &= K_{n+\frac{1}{2}}^i = K_{n+1}^{i-m}, \quad v_{j-1}^{\tilde{T}} = K_{n-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{\alpha}} = K_n^{i+\frac{1}{\alpha}-m} \end{aligned} \quad (20)$$

であるから全離散 eNW モデル

$$\frac{K_n^{i+\frac{1}{\alpha}}}{K_n^i} = \frac{1 + \alpha \gamma K_{n+1}^{i-m}}{1 + \alpha \gamma K_n^{i+\frac{1}{\alpha}-m}} \quad (21)$$

を得る。独立変数が整数値をとるために  $\alpha = 1/l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) とする。(21) 式は連続極限  $\gamma \rightarrow 0, K_n^i = (1/\alpha)S_n(\gamma i)$  により (10) 式に帰着できる。さらに、(18) 式から

$$K_{n+1}^{i-m} = K_n^{i+m} \quad (22)$$

と変形されるので、(21) 式は常差分方程式

$$\frac{K_n^{i+\frac{1}{\alpha}}}{K_n^i} = \frac{1 + \alpha \gamma K_n^{i+m}}{1 + \alpha \gamma K_n^{i+\frac{1}{\alpha}-m}} \quad (23)$$

に書き換えることもできる。

## (4) 全離散 eNW モデルの厳密解

### a) 従属変数 1 つの双線形形式と厳密解

よく知られているように、全離散 LV 方程式 (16) 式において

$$v_j^{\tilde{T}} = \frac{f_{j+2}^{\tilde{T}} f_{j-1}^{\tilde{T}+1}}{f_{j+1}^{\tilde{T}} f_j^{\tilde{T}+1}} \quad (24)$$

と変換すると双線形形式

$$f_{j+1}^{\tilde{T}+1} f_j^{\tilde{T}} - f_{j+1}^{\tilde{T}} f_j^{\tilde{T}+1} = \delta (f_{j+2}^{\tilde{T}} f_{j-1}^{\tilde{T}+1} - f_{j+1}^{\tilde{T}+1} f_j^{\tilde{T}}) \quad (25)$$

が得られる [5]. 1 ソリトン解は

$$f_j^{\tilde{T}} = 1 + e^{kj - \omega \tilde{T}}, \quad \omega = \log \left( \frac{1 + \delta(1 + e^{-k})}{1 + \delta(1 + e^k)} \right) \quad (26)$$

で与えられる。ここで、(19) 式から

$$g_n^i = f_j^{\tilde{T}} = 1 + e^{2kn - \alpha \Omega i}, \quad \Omega = \log \left( \frac{1 + \alpha \gamma (1 + e^{-k})}{1 + \alpha \gamma (1 + e^k)} \right) \quad (27)$$

を考える。また、(18) 式から関係式

$$g_n^{\bar{i}-m} = g_{n-\frac{1}{2}}^{\bar{i}} \quad (28)$$

を仮定すると

$$m = -\frac{k}{\alpha\Omega} \quad (29)$$

を得る。よって、進行波の速さは  $|\alpha\Omega/2k| = 1/(2m)$  である。

$$\begin{aligned} f_{j+2}^{\bar{i}} &= f_{2n+2}^{\bar{i}} = g_{n+1}^{\bar{i}}, & f_{j-1}^{\bar{i}} &= f_{2n-1}^{\bar{i}} = g_{n-\frac{1}{2}}^{\bar{i}} = g_n^{\bar{i}-m+\frac{1}{\alpha}} \\ f_{j+1}^{\bar{i}} &= f_{2n+1}^{\bar{i}} = g_{n+\frac{1}{2}}^{\bar{i}} = g_{n+1}^{\bar{i}-m}, & f_j^{\bar{i}} &= f_{2n}^{\bar{i}} = g_n^{\bar{i}+\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (30)$$

であるから、(24) 式より

$$K_n^{\bar{i}} = \frac{g_{n+1}^{\bar{i}} g_n^{\bar{i}-m+\frac{1}{\alpha}}}{g_{n+1}^{\bar{i}-m} g_n^{\bar{i}+\frac{1}{\alpha}}} \quad (31)$$

は (21) 式の厳密解となる。この解はソリトン解の特殊化により得られるため  $|n| \rightarrow \infty$  のとき  $K_n^{\bar{i}} \rightarrow 1$  を満たしている。なお、 $g_n^{\bar{i}}$  が満たす双線形式は

$$g_{n+1}^{\bar{i}-m+\frac{1}{\alpha}} g_n^{\bar{i}} - g_{n+1}^{\bar{i}-m} g_n^{\bar{i}+\frac{1}{\alpha}} = \alpha\gamma \left( g_{n+1}^{\bar{i}} g_n^{\bar{i}-m+\frac{1}{\alpha}} - g_{n+1}^{\bar{i}-m+\frac{1}{\alpha}} g_n^{\bar{i}} \right) \quad (32)$$

である。

#### b) 従属変数 2 つの双線形式と厳密解

双線形式法 [7] に従い、変数変換

$$K_n^{\bar{i}} = \frac{F_n^{\bar{i}}}{G_n^{\bar{i}}} \quad (F_n^{\bar{i}} > 0, G_n^{\bar{i}} > 0) \quad (33)$$

を仮定し、 $F = F_n^{\bar{i}}, F^- = F_n^{\bar{i}-m}, F^+ = F_n^{\bar{i}+\frac{1}{\alpha}}, F_+ = F_{n+1}^{\bar{i}}$  とすると、(21) 式は

$$\frac{F^+ G}{G_+ G^+ + \alpha\gamma F_+ G^+} = \frac{F G^+}{G_+ G^+ + \alpha\gamma F^+ G_+} (= \lambda) \quad (34)$$

に変形される。分離パラメータ  $\lambda \neq 0$  を導入すると、以下の双線形方程式

$$\begin{aligned} F^+ G &= \lambda(G_+^- G^+ + \alpha\gamma F_+^- G^+) \\ F G^+ &= \lambda(G_+^- G^+ + \alpha\gamma F^+ G_+) \end{aligned}$$

を得る。これは (21) 式的双線形式である。ここで、 $F = 1 + CX$ ,  $G = A + BX$ ,  $X = e^{b\bar{i}+an}$  ( $A, B, C$  は正の定数,  $a, b$  は定数) の形の解を仮定すると、パラメータに対する以下の 3 通りの十分条件が求まる。

#### 2.-(5)-a)-1. $B - AC \neq 0, \frac{1}{\alpha} \neq m$ かつ

$$a = b \left( \frac{1}{\alpha} + m \right) \quad (35)$$

$$B = \left( \frac{1}{\lambda e^{a-2mb}} - \alpha\gamma \right) C \quad (36)$$

$$A = \frac{1}{\lambda} - \alpha\gamma \quad (37)$$

$$\lambda\gamma e^{\frac{b}{\alpha}} + e^{b(\frac{1}{\alpha}+m)} \left( \frac{1}{\alpha} - \lambda\gamma \right) - \frac{1}{\alpha} e^{mb} = 0 \quad (38)$$

#### 2.-(5)-a)-2. $B - AC \neq 0$ , (36) 式, (37) 式と $\frac{1}{\alpha} = m$ かつ

$$a = mb + \log \left\{ 1 + \frac{m}{\lambda\gamma} (e^{mb} - 1) \right\} \quad (39)$$

#### 2.-(5)-a)-3. $B - AC = 0$

#### (5) 全離散厳密解の挙動

##### a) 従属変数 1 つの場合

厳密解 (31) 式の特別な場合として  $g = \text{定数}$ ,  $K_n^{\bar{i}} = 1$  という自明な定数解が得られる。非自明な解について以下に述べる。(27) 式と (29) 式より、 $\alpha, \gamma, m$  を与えると  $k$  は特定の値に定まる。すなわち、 $k$  は

$$\left( \frac{e^k + \alpha\gamma e^k + \alpha\gamma}{e^k + \alpha\gamma e^k + \alpha\gamma e^{2k}} \right)^{\alpha m} = \frac{1}{e^k} \quad (40)$$

を満たさねばならない。任意の  $\alpha, \gamma, m$  に対し  $k = 0$  は (40) 式を満たす。また、ある  $k$  が (40) 式を満たせば  $-k$  も満たす。一般に複素数解  $k$  が存在し得るが、このとき解  $K_n^{\bar{i}}$  は複素数値をとり、交通流モデルの解として妥当ではない。

$\alpha, \gamma, m$  の値を適当に与え、数値的に実数解  $k$  を求めて厳密解のグラフを描いてみる。図 3, 4 は  $\alpha = 1$  でプロット範囲が  $-10 \leq \bar{i} \leq 10, -5 \leq n \leq 5$  の場合である。図 5, 6 は  $\alpha = 1/2$  でプロット範囲が  $-10 \leq \bar{i} \leq 10, -5 \leq n \leq 5$  の場合である。

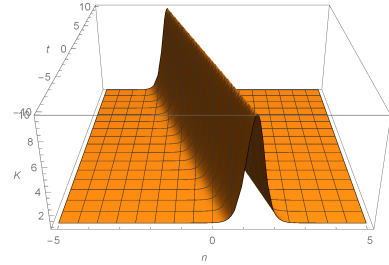


図 3  $\gamma = 0.1, m = 3, k \cong 2.88$

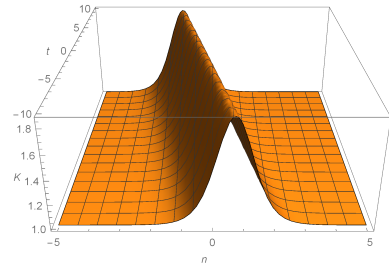


図 4  $\gamma = 0.1, m = 5, k \cong 1.25$

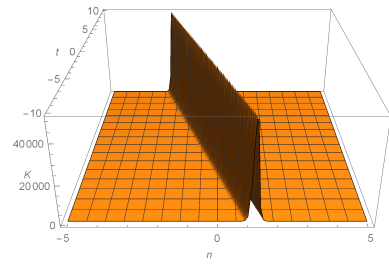


図 5  $\gamma = 0.05, m = 3, k \cong 11.13$

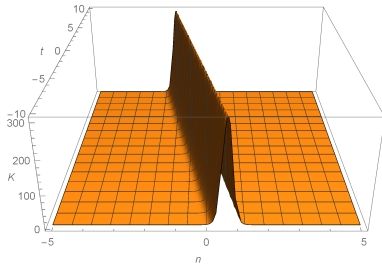


図 6  $\gamma = 0.05, m = 5, k \cong 6.03$

図 3～図 6 から, 1 ソリトン解のグラフになっており, 車間距離の分布が後方へ伝わる様子を表していることが分かる. また, 遅延  $m$  を大きくすることによって, 進行波の速さが小さくなるのがグラフの概形から読み取れる.

#### b) 従属変数 2 つの場合

前節で求めた厳密解の振る舞いを調べる. 図 7 はパラメータが条件 2.-(5)-a)-1. を満たす場合である. ただし,  $\lambda = 1, \gamma = 0.01, C = 1, \alpha = 1/3, m = 20$  とし, 他のパラメータは  $A \cong 1.00, B \cong 2.20 \times 10^{-3}, a \cong -7.03, b \cong -0.31$  となる. 車間距離に対応する  $K$  の時間変化を追跡すると, 徐々に  $K$  の大きな車の番号が減少していることが分かる. すなわち, この解は交通流という渋滞区間の最後尾の様子を表すと考えられる. 図 8 はパラメータが条件 2.-(5)-a)-2. を満たす場合である. ただし,  $\lambda = 1, \gamma = 0.01, C = 1, 1/\alpha = m = 3$  とし, 他のパラメータは  $A \cong 1.00, B \cong 1.02 \times 10^{-9}, a \cong 35.70, b = 5$  となる.  $K$  の時間変化を追跡すると, 徐々に  $K$  の大きな車の番号が増加していることが分かる. この解は交通流という渋滞区間の先頭の様子を表すと考えられる. なお, 進行波の速さは  $|b/a|$  である. パラメータが条件 2.-(5)-a)-3. を満たすとき,  $G = AF$  となり定数解  $K = 1/A$  となる.

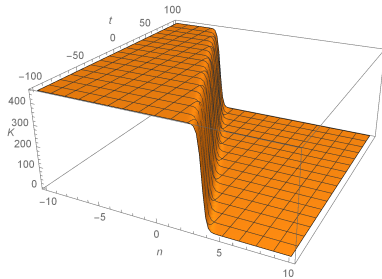


図 7  $\alpha = 1/3, m = 10$

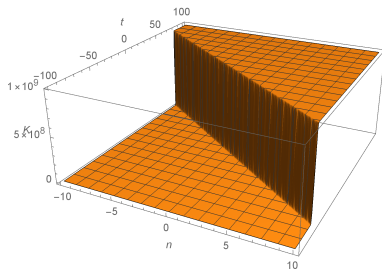


図 8  $1/\alpha = m = 3$

### 3. 超離散 eNW モデル

#### (1) 超離散化

「連続 (アナログ) から離散 (デジタル) へ」の精神を徹底すると, 空間時間変数だけでなく, 状態を表す量までもデジタル化したくなる. これは非常に難しい問題だが, 解の非解析的極限を考えると超離散化の方法によって解決された [8]. 超離散化とは以下の公式によりマックス-プラスの方程式を得るという方程式の変換手続きである [9].

$$\epsilon \log \left( \exp \frac{A}{\epsilon} \cdot \exp \frac{B}{\epsilon} \right) = A + B,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left( \exp \frac{A}{\epsilon} + \exp \frac{B}{\epsilon} \right) = \max\{A, B\} \quad (41)$$

(41) を用いることにより, 差分方程式の従属変数を離散化することができる. (21) 式に, 超離散化法 (41) 式を適用する. 超離散変数を連続変数とパラメータの両方に導入する.

$$K_n^i = \exp \frac{X_n^i}{\epsilon}, \quad \gamma = \exp \frac{\zeta}{\epsilon} \quad (\zeta \text{ は負の整数}) \quad (42)$$

とおき,  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限をとると, 超離散 eNW モデル

$$X_n^{i+\frac{1}{\alpha}} - X_n^i = \max\{0, X_{n+1}^i + \zeta\} - \max\{0, X_n^{i+\frac{1}{\alpha}-m} + \zeta\} \quad (43)$$

を得る. 初期値を整数として与える限り,  $X_n^i$  は整数値をとる.

#### (2) 従属変数 1 つの解

(27) 式, (29) 式, (31) 式に超離散化法を適用する. 超離散変数を

$$g_n^i = \exp \frac{G_n^i}{\epsilon}, \quad k = \frac{\kappa}{\epsilon}, \quad \Omega = \frac{\psi}{\epsilon} \quad (44)$$

とおき,  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限をとると, (43) 式の厳密解

$$X_n^i = G_{n+1}^i + G_n^{i+\frac{1}{\alpha}-m} - G_{n+1}^{i-m} - G_n^{i+\frac{1}{\alpha}} \quad (45)$$

$$G_n^i = \max(0, 2\kappa n - \alpha\psi i) \quad (46)$$

$$\psi = \max(0, \zeta - \kappa) - \max(0, \zeta + \kappa) \quad (47)$$

$$\psi = -\frac{\kappa}{m\alpha} \quad (48)$$

を得る. また, (47) 式, (48) 式から以下の条件

#### 3.-(2)-1. $\kappa = 0$

$$3.-(2)-2. \quad \kappa > 0, \zeta + \kappa \geq 0 \text{ のとき } \kappa = \frac{m\alpha\zeta}{1-m\alpha}$$

$$3.-(2)-3. \quad \kappa < 0, \zeta - \kappa > 0 \text{ のとき } \kappa = \frac{m\alpha\zeta}{m\alpha-1}$$

を得る.

### (3) 従属変数 2 つの解

(31) 式～(39) 式に超離散化法を適用する. 超離散変数を連続変数とパラメータの両方に導入する.

$$\begin{aligned} F_n^i &= \exp \frac{\tilde{F}_n^i}{\epsilon}, \quad G_n^i = \exp \frac{\tilde{G}_n^i}{\epsilon}, \\ A &= \exp \frac{\tilde{A}}{\epsilon}, \quad B = \exp \frac{\tilde{B}}{\epsilon}, \quad C = \exp \frac{\tilde{C}}{\epsilon}, \\ a &= \frac{\tilde{a}}{\epsilon}, \quad b = \frac{\tilde{b}}{\epsilon}, \quad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{\epsilon} \end{aligned} \quad (49)$$

とおき,  $\epsilon \rightarrow +0$  の極限をとると,

$$\begin{aligned} X_n^i &= \tilde{F} - \tilde{G} \\ F_n^i &= \max(0, \tilde{C} + \tilde{b}i + \tilde{a}n) \\ G_n^i &= \max(\tilde{A}, \tilde{B} + \tilde{b}i + \tilde{a}n) \end{aligned} \quad (50)$$

となる. また, 以下の 7 つの条件

#### 3.-(3)-1. $\zeta + \tilde{\lambda} = 0, \tilde{b} = 0, \frac{1}{\alpha} \neq m$ のとき

$$\tilde{a} = 0 \quad (51)$$

$$\tilde{B} \leq \zeta + \tilde{C} \quad (52)$$

$$\tilde{A} \leq -\tilde{\lambda} \quad (53)$$

$$\tilde{b} = 0 \quad (54)$$

#### 3.-(3)-2. $\zeta + \tilde{\lambda} < 0, \tilde{b} < 0, \tilde{b}(m - \frac{1}{\alpha}) = \zeta + \tilde{\lambda}, m - \frac{1}{\alpha} > 0$ のとき

$$\tilde{a} = \tilde{b} \left( \frac{1}{\alpha} + m \right) \quad (55)$$

$$\tilde{B} \leq \zeta + \tilde{C} \quad (56)$$

$$\tilde{A} = -\tilde{\lambda} \quad (57)$$

$$\tilde{b} = \frac{\alpha(\zeta + \tilde{\lambda})}{m\alpha - 1} \quad (58)$$

#### 3.-(3)-3. $\zeta + \tilde{\lambda} < 0, \tilde{b} = 0, \frac{1}{\alpha} \neq m$ のとき

$$\tilde{a} = 0 \quad (59)$$

$$\tilde{B} = -\tilde{\lambda} + \tilde{C} \quad (60)$$

$$\tilde{A} = -\tilde{\lambda} \quad (61)$$

$$\tilde{b} = 0 \quad (62)$$

#### 3.-(3)-4. $\zeta + \tilde{\lambda} = 0, \tilde{b} \leq 0, \frac{1}{\alpha} = m$ のとき

$$\tilde{a} < 2m\tilde{b} \quad (63)$$

$$\tilde{B} = 2m\tilde{b} - \tilde{a} - \tilde{\lambda} + \tilde{C} \quad (64)$$

$$\tilde{A} \leq -\tilde{\lambda} \quad (65)$$

$$\tilde{b} \leq 0 \quad (66)$$

#### 3.-(3)-5. $\zeta + \tilde{\lambda} = 0, \tilde{b} \leq 0, \frac{1}{\alpha} = m$ のとき

$$\tilde{a} = 2m\tilde{b} \quad (67)$$

$$\tilde{B} \leq \zeta + \tilde{C} \quad (68)$$

$$\tilde{A} \leq -\tilde{\lambda} \quad (69)$$

$$\tilde{b} \leq 0 \quad (70)$$

#### 3.-(3)-6. $\zeta + \tilde{\lambda} < 0, \tilde{b} = 0, \frac{1}{\alpha} = m$ のとき

$$\tilde{a} = -\tilde{\lambda} + \zeta \quad (71)$$

$$\tilde{B} \leq \zeta + \tilde{C} \quad (72)$$

$$\tilde{A} = -\tilde{\lambda} \quad (73)$$

$$\tilde{b} = 0 \quad (74)$$

#### 3.-(3)-7. $\zeta + \tilde{\lambda} < 0, \tilde{b} > 0, \frac{1}{\alpha} = m$ のとき

$$\tilde{a} = 2m\tilde{b} - \tilde{\lambda} - \zeta \quad (75)$$

$$\tilde{B} \leq \zeta + \tilde{C} \quad (76)$$

$$\tilde{A} = -\tilde{\lambda} \quad (77)$$

$$\tilde{b} > 0 \quad (78)$$

が求まる.

### (4) 超離散厳密解の挙動

#### a) 従属変数 1 つの場合

$\alpha, m, \zeta, \kappa$  の値を適当に与え, 数値的に実数解  $k$  を求めて厳密解のグラフを描いてみる. Fig.9, 10 はそれぞれ条件 3.-(2)-2., 条件 3.-(2)-3. の時で, プロット範囲が  $-10 \leq i \leq 10, -5 \leq n \leq 5$  の場合である. 進行波の速さは  $|\alpha\psi/2\kappa| = 1/(2m)$  である. 全離散厳密解の従属変数が 1 つの場合と同様に, 1 ソリトン解のグラフになっており, 車間距離の分布が後方へ伝わる様子を表していることが分かる. また, 遅延  $m$  を大きくすることによって, 進行波の速さが小さくなることがグラフの概形から読み取れる.

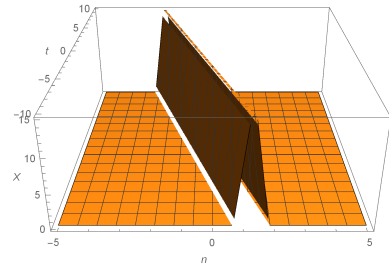


図 9  $\alpha = 1/2, m = 3, \zeta = -5, \kappa = 15$

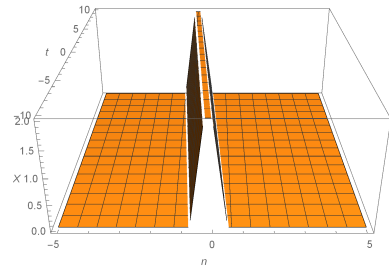


図 10  $\alpha = 1/10, m = 20, \zeta = -1, \kappa = -2$



#### b) 従属変数 2 つの場合

$\alpha, m, \zeta, \tilde{\lambda}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{a}, \tilde{b}$  を与え厳密解の振る舞いを調べる.  $K$  の値は  $\tilde{a}n \rightarrow \infty$  の時  $\tilde{C} - (\tilde{B} - \tilde{A})$ ,  $\tilde{a}n \rightarrow -\infty$  の時  $-\tilde{A}$  となるため厳密解のグラフは衝撃波の概形になる. 図 11, 図 12 はそれぞれパラメータが条件 3.-(3)-2., 条件 3.-(3)-4. を満たす場合である. 図 11 と図 12 の車間距離に対応する  $X$  の時間変化を追跡する. 図 11 は徐々に  $X$  の大きな車の番号が減少していることが分かる. すなわち, この解は交通流という渋滞区間の最後尾の様子を表すと考えられる. また, 条件 3.-(3)-5., 条件 3.-(3)-7. も同様の概形になる. 図 12 は  $X$  の時間変化を追跡すると, 徐々に  $X$  の大きな車の番号が増加していることが分かる. この解は交通流という渋滞区間の先頭の様子を表すと考えられる. なお, 進行波の速さは  $|\tilde{b}/\tilde{a}| = |1/(1/\alpha + m)|$  である. 条件 3.-(3)-1., 条件 3.-(3)-3. は  $\tilde{a} = 0, \tilde{b} = 0$  より時間と空間に依存しないので定数解になる. 条件 3.-(3)-6. は  $\tilde{b} = 0$  より時間に依存しないので時間発展しない定常衝撃波解になる.

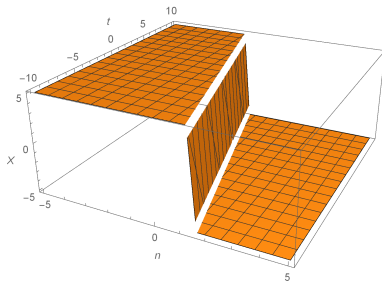


図 11  $\alpha = 1/3, m = 5, \zeta = -3, \tilde{\lambda} = -5, \tilde{A} = 5,$   
 $\tilde{B} = 5, \tilde{C} = 10, \tilde{a} = -32, \tilde{b} = -4$

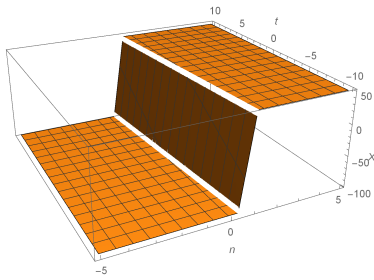


図 12  $1/\alpha = m = 10, \zeta = -2, \tilde{\lambda} = 2, \tilde{A} = -50,$   
 $\tilde{B} = 103, \tilde{C} = 5, \tilde{a} = -250, \tilde{b} = -10$

#### 4. まとめ

本稿では, 進行波解を共有することから, eNW モデルは LV 方程式と対比でき, 可積分系と関連付けることによって eNW モデルの全離散類似と超離散方程式とそれぞれに対応する厳密解を求めることができた.

論文 [2] では eNW モデルの厳密解が論じられ, 従属変数を 2 つ用いた双線形形式を通して自由パラメータを 1 つ持つ厳密解が求められた. このことから, 離散系においても同様に自由パラメータを持つ解が存在すると予想していた. 従属変数を 1 つ用いた離散双線形形式から得られた解は任意パラメータを持たず, ソリトンのような概形をしていた. これは一般道で渋滞中, 運転者が前方の車との車間距離が開いたのに反応して, 車間距離を詰める状態を表していると考えられる. 従属変数を 2 つ用いた離散双線形形式を通して任意パラメータ  $C$  を持つ厳密解を求めることができた. 従って, 従属変数 1 つの場合より自由度の高い解を得られたといえる. また, 解のグラフは衝撃波のような概形をしており, 実際の道路交通状況を表しているように見える. さらに, 超離散化の厳密解でも同様の挙動が見られた.

本稿でグラフの描画に用いたパラメータは一例であり, 交通流モデルとして妥当な解を与える一般的なパラメータの条件を実際の道路交通情報等から調べる必要がある. 適切な境界条件の下でのコンピュータ上での計算, シミュレーションによって, 交通流モデルとしての解析を行うことが課題となる.

#### 参考文献

- [1] G.B. Whitham, Proc. R. Soc. London Ser. A 428 (1990) 49.
- [2] M. Kanai and Y. Tutiya, J. Phys. Soc. Jpn. 76 (2007) 083002.
- [3] M. Kanai, S. Isojima, K. Nishinari and T. Tokihiro, Phys. Rev. E, 79 (2009) 056108.
- [4] 鈴木大庸, 磯島伸, 『離散可積分系による Newell-Whitham モデルの時間差分化とその解』, 研究集会報告「非線形波動研究の深化と展開」28AO-S6, 九州大学応用力学研究所, 2017 年 3 月, pp. 61–66.
- [5] 中村佳正 編, 『可積分系の応用数理』, 裳華房 (2000).
- [6] 金井政宏, 杉山雄規, 『時間遅れ最適速度モデルの厳密解について』, Proceedings of the Symposium on Simulation of Traffic Flow, 13 (2007).
- [7] R. Hirota, The Direct Method in Soliton Theory, ed. A. Nagai, J. Nimmo, and C. Gilson (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004).
- [8] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」共立出版 (2003).
- [9] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. 76, (1996) 3247.